

## Лабораторна робота №3

### «Дослідження магнітних полів провідників зі струмом»

Мета роботи: Вивчення закону Біо-Савара та застосування його для дослідження магнітних полів провідників зі струмом. Отримати графічне та інтуїтивне уявлення про досліджувані поля. Навчитися обчислювати циркуляцію і ротор отриманого магнітного поля.

#### Теоретичне введення

Магнітне поле характеризується напруженістю  $\vec{H}$  і вектором магнітної індукції  $\vec{B}$ ,

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H},$$

де  $\mu_a$  - абсолютна магнітна проникність середовища. Для довільного середовища  $\mu_a = \mu_0 \mu_r$ , де  $\mu_r$  - відносна магнітна проникність,  $\mu_r = B/B_0$ ,  $B_0$  - магнітна індукція вакууму.

Магнітна індукція  $\vec{B}$  вимірюється в одиницях тесла (Тл). Одиниця напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  - А/м.

На відміну від електростатичного поля, в якому  $\text{div} \vec{D} = \rho$ , у магнітному полі

$$\text{div} \vec{B} = 0,$$

оскільки силові лінії магнітного поля або замкнуті, або йдуть у нескінченність.

Величину і напрямок створюваного магнітного поля обчислюють згідно із законом Біо-Савара. Цей закон свідчить, що напруженість магнітного поля  $d\vec{H}$ , створювана струмом зі щільністю  $\vec{j}$  в об'ємі  $dV$  дорівнює

$$d\vec{H} = \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{4\pi r^3} dV$$

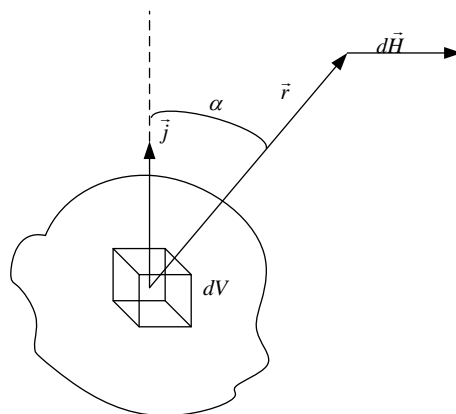


Рис.1.

$\vec{j} \times \vec{r}$  - векторний добуток векторів  $\vec{j}$  і  $\vec{r}$ , яке дорівнює  $|\vec{j}| \cdot |\vec{r}| \sin \alpha = jr \sin \alpha$ .

За абсолютною величиною  $dH = \frac{j \sin \alpha}{4\pi r^2} dV$ , де  $\alpha$  - кут між векторами  $\vec{j}$  і  $\vec{r}$ .

Векторний добуток можна записати у вигляді

$$\vec{j} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ j_x & j_y & j_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (j_y z - j_z y) \vec{i}_x - (j_x z - j_z x) \vec{i}_y + (j_x y - j_y x) \vec{i}_z,$$

$$|\vec{j} \times \vec{r}| = jr \sin \alpha$$

Звісно, що результуюча напруженість поля, що результує, - це

$$\vec{H} = \int_V \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{4\pi r^3} dV.$$

Циркуляцією напруженості магнітного поля називається інтеграл по замкнутому контуру

$$\oint \vec{H} d\vec{l}.$$

Якби існувало поняття магнітного заряду за аналогією з електричним зарядом, то інтеграл (6.5) визначав би величину роботи поля, виконуваної під час переміщення такого магнітного заряду цим шляхом. В електричному полі аналогічна циркуляція дорівнює нулю, тобто  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ .

У полі постійних магнітів циркуляція напруженості магнітного поля також дорівнює нулю. Не дорівнює нулю циркуляція постійного магнітного поля лише в тому разі, коли замкнутий контур охоплює струм, що пронизує його.

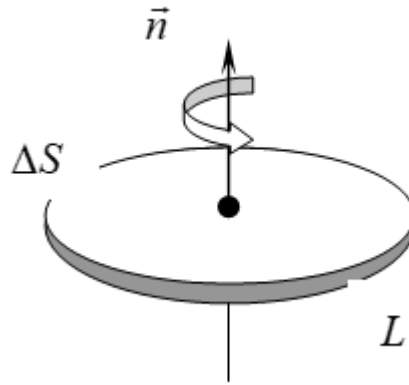
У загальному випадку

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I,$$

тобто циркуляція напруженості магнітного поля дорівнює сумі струмів, що пронизують поверхню, охоплену замкнутим контуром. Якщо контур не охоплює струм, то  $\oint \vec{H} d\vec{l} = 0$ .

Поняття циркуляції дає змогу визначати інтегральні характеристики поля. Поняття ротора дасть змогу визначити ці характеристики в диференціальній формі, які дадуть можливість описувати поля в кожній окремій точці простору, точці в деякому нескінченно малому об'ємі, що оточує ці точки.

Нехай задано векторне поле  $\vec{A}$ . Виберемо напрямок вектора нормалі до площини  $\vec{n}$  і обмежимо малу площу  $\Delta S$  контуром  $L$  в площині  $\perp \vec{n}$ . Направлення обходу  $L$  пов'язано з  $\vec{n}$  правим винтом.



Ротором вектора називається вектор, проекція якого на  $\vec{n}$  дорівнює

$$\text{rot}_n \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} d\vec{l}}{\Delta S}$$

Ротор (вихор) характеризує «завихрення» вектора. Вводячи оператор «набла» можна записати (у декартових координатах):

$$\text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left\| \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right\|$$

Реалізація закону Біо-Савара, обчислення ротора отриманого магнітного поля і його циркуляції на ЕОМ вимагає завдання досліджуваної системи в дискретному вигляді (рис. 2). У лабораторній роботі досліджується магнітне поле, що формується системою з двох провідників, по яких тече постійний струм.

Формується дискретний простір ( $x=0 \dots X_{\text{end}}$ ,  $y=0 \dots Y_{\text{end}}$ ,  $z=0 \dots Z_{\text{end}}$ ), у кожній точці  $P(x,y,z)$  якого необхідно обчислити вектор напруженості магнітного поля  $\vec{H}(x,y,z)$ . Також вихідними даними є розташування провідників у просторі та значення густини струму  $\vec{j}_n$  у кожній дискретній точці  $n$  провідників. Поле в кожній точці  $P(x,y,z)$  формується як сумарне поле від кожної дискретної точки  $n$  провідників:

$$\vec{H}(x,y,z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\vec{j}_n \times \vec{r}_n(x,y,z)}{4\pi (r_n(x,y,z))^3}.$$

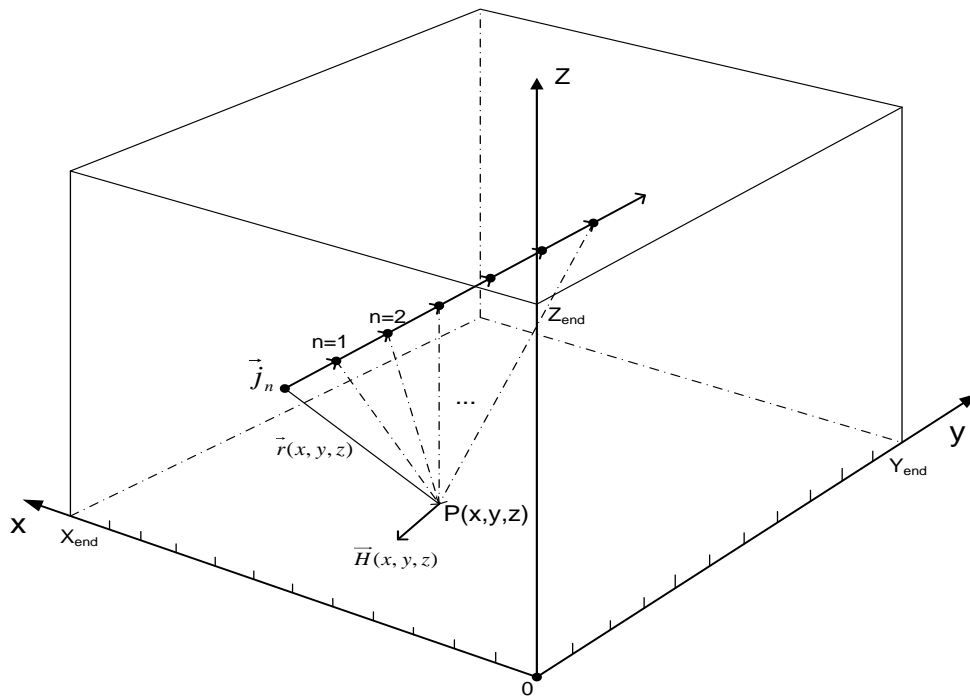


Рис.2.

У лабораторній роботі обчислюються складові вектора  $\vec{H}(x, y, z)$ , за якими будується картина поля. Наприклад, для обчислення складової  $H_x(x, y, z)$  реалізується обчислення такого виразу:

$$H_x(x, y, z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{j_{y_n} \cdot z_n - j_{z_n} \cdot y_n}{4\pi (r_n(x, y, z))^3},$$

де  $j_{y_n}$ ,  $j_{z_n}$  - складові вектора густини струму  $\vec{j}_n$  провідника в кожній дискретній точці n.  $z_n$ ,  $y_n$  - складові радіус-вектора точки P.

Так само обчислюються складові вектора напруженості по y і z згідно з формулою для обчислення векторного добутку.

Таким чином, знаючи складові вектора  $\vec{H}(x, y, z)$  у кожній точці P(x, y, z) можна охарактеризувати отримане магнітне поле (тобто його напрямки і сили).

Під час обчислення ротора поля  $\vec{H}(x, y, z)$  необхідно згідно з формулою для ротора знаходити похідні складових поля за відповідними напрямками. Якщо поле задано в дискретному вигляді, то знайти його похідні не складає труднощів.

Розглянемо, наприклад, поле задане на площині  $\vec{A}(x, y)$ . Тоді похідні складової поля  $A_x$  та  $A_y$  у напрямку x дорівнюють.

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{A_x(x+1, y) - A_x(x, y)}{x+1-x} = A_x(x+1, y) - A_x(x, y)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{A_y(x+1, y) - A_y(x, y)}{x+1-x} = A_y(x+1, y) - A_y(x, y)$$

Так само обчислюються похідні за y.

Особливості дискретної реалізації обчислення циркуляції поля полягають у такому. Розглянемо для прикладу поле на площині  $\vec{A}(x,y)$  і виберемо шлях АВ, яким необхідно обчислити циркуляцію (рис.3).

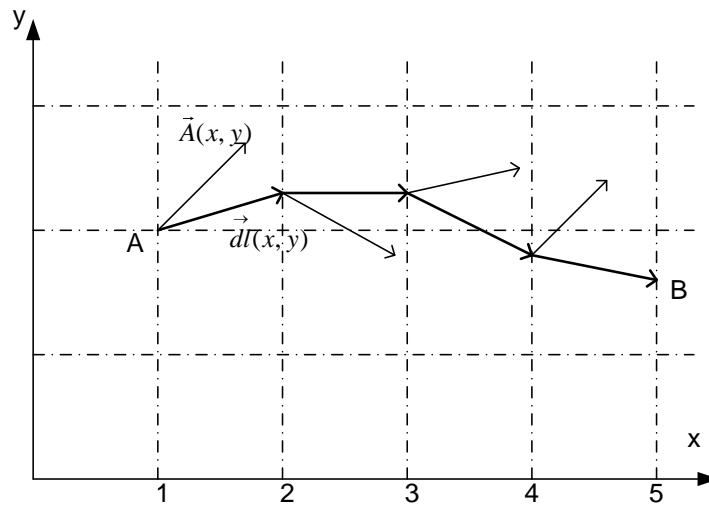


Рис.3.

Згідно з формулою циркуляція вектора обчислюється як скалярний добуток вектора і спрямовуючого вектора шляху, по якому обчислюється циркуляція. Щоб обчислити циркуляцію в дискретному випадку, необхідно обчислити сумарну циркуляцію по кожній дискретній ділянці (тобто від 1 - 2; від 2 - 3 тощо). Напрямний вектор дискретних складових шляху АВ обчислюється таким чином:

$$\vec{dl}_n = (x_{n+1} - x_n, y_{n+1} - y_n),$$

де n у даному випадку змінюється від n=1..4.

Таким чином, циркуляція дорівнюватиме:

$$\sum_{n=0}^4 A_{xn}(x_n, y_n) \cdot dl_{xn}(x_n, y_n) + A_{yn}(x_n, y_n) \cdot dl_{yn}(x_n, y_n) = \sum_{n=1}^4 A_{xn}(x_n, y_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) + A_{yn}(x_n, y_n) \cdot (y_{n+1} - y_n)$$

Таким чином реалізується інтегрування по контуру.

### Особливості роботи програми та виконання лабораторної роботи

Особливість лабораторної роботи полягає в тому, що для того, щоб відобразити характер поведінки магнітного поля провідників зі струмом у просторі, використовується відображення поля в січних площинах. Так, наприклад, можна досліджувати поведінку поля в площині X0Y у перерізі будь-якому перерізі Z. Для цього необхідно змінити в програмі параметр zs. Для дослідження поля в площині Z0Y - вибирається січна площина xs. Для дослідження поля в площині Z0X - вибирається січна площина ys.

Лабораторна робота написана в середовищі моделювання MathCad, і розбита на блоки. Для того щоб відкрити потрібний блок, необхідно клацнути по ньому лівою клавішею мишки. Після виконання розрахунків у відповідному блоці його можна закрити таким самим чином.

Дані в сегментах, позначених зеленим кольором, необхідно змінювати відповідно до варіанта роботи. У червоних сегментах позначено завдання, яке необхідно зробити студенту. Щодо кожного пункту в програмі є пояснення.

Значення  $x0\_A$ ,  $y0\_A$ ,  $z0\_A$  і  $x0\_B$ ,  $y0\_B$ ,  $z0\_B$  - визначають положення двох провідників у дискретному просторі.

Значення  $Jx\_A$ ,  $Jy\_A$ ,  $Jz\_A$  і  $Jx\_B$ ,  $Jy\_B$ ,  $Jz\_B$  - визначають густину струму, що протікає в провідниках.

$Hx1\_A$ ,  $Hy1\_A$ ,  $Hx1\_B$ ,  $Hy1\_B$  - складові вектора напруженості магнітного поля в площині  $XOY$ .

Зверніть увагу, щоб отримати складові вектора в січній площині  $zs$ , необхідно виконати таке  $Hx1\_A_{zs}$ ,  $Hy1\_A_{zs}$ ,  $Hx1\_B_{zs}$ ,  $Hy1\_B_{zs}$ .

Індекс 1 означає площину  $XOY$ ; індекс 2 - площину  $ZOY$ ; індекс 3 - площину  $ZOX$ .

Для обчислення циркуляції потрібно знайти складові вектора заданої точки  $P(x,y,z)$  дискретного об'єму. Це можна зробити, виконавши в MathCad таку операцію:

$$(Hx1\_A)_{x,y} (Hy1\_A)_{x,y} (Hx1\_B)_{x,y} (Hy1\_B)_{x,y}$$

де  $x,y,z$  - це координати точки  $P$ .

Для того, щоб зобразити векторне поле на площині в MathCad, потрібно задати матрицю, розмір якої відповідатиме кількості дискретних точок площини, а кожне значення цієї матриці має бути комплексним числом. Таким чином, для кожної точки визначаємо напрямок, подібно до того, як звичайне комплексне число відображається вектором на комплексній площині. Щоб відобразити це поле, потрібно вибрати тип графіка Vector Field. Так, для прикладу, задається розраховане векторне поле провідника  $A$  в площині  $XOY$  для перерізу  $zs$ :

$$HA_{xy} := Hx1\_A_{zs} + i \cdot Hy1\_A_{zs}$$

### Задание

ВАРІАНТ	Розташування провідників						Струми в провідниках						Контур для обчислення циркуляції					
	Провідник А			Провідник В			Провідник А			Провідник В								
	x0_A	y0_A	z0_A	x0_B	y0_B	z0_B	Jx_A	Jy_A	Jz_A	Jx_B	Jy_B	Jz_B	xst	xend	yst	yend	zst	zend
1	8	0	z - N/2	-8	0	z - N/2	0	0	1	0	0	-1	10	12	15	15	0	0
2	8	z - N/2	z - N/2	-8	0	z - N/2	0	1	1	0	0	-1	12	12	15	15	0	2
3	8	z - N/2	z - N/2	-8	z - N/2	0	0	1	1	0	1	0	12	10	15	15	2	2
4	z - N/2	z - N/2	z - N/2	-8	z - N/2	0	1	1	1	0	1	0	10	10	15	15	2	0
5	0	0	z - N/2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	14	16	14	16	0	0
6	0	8	z - N/2	0	-8	z - N/2	0	0	1	0	0	-2	10	12	15	15	0	0
7	z - N/2	8	0	0	-8	z - N/2	-1	0	0	0	0	3	12	12	15	15	0	2

Побудувати графіки згідно з варіантом.

Варіант 1. Ротор поля в площині  $X_0Y$  ( $z_s=1$ );  $X_0Z$  ( $y_s=15$ ).

Варіант 2. Ротор поля в площині  $Z_0Y$  ( $x_s=8$ ,  $x_s=22$ );  $X_0Z$  ( $y_s=15$ ).

Варіант 3. Ротор поля в площині  $X_0Y$  ( $z_s=15$ );  $Z_0Y$  ( $x_s=8$ ,  $x_s=22$ ).

Варіант 4. Ротор поля в площині  $Z_0Y$  ( $x_s=1$ ,  $x_s=8$ ,  $x_s=15$ ,  $x_s=29$ );  $X_0Y$  ( $x_s=8$ ,  $x_s=22$ ).

Варіант 5. Ротор поля в площині  $X_0Y$  ( $z_s=1$ ,  $z_s=15$ );  $Z_0Y$  ( $x_s=15$ ).

Варіант 6. Ротор поля в площині  $X_0Y$  ( $z_s=1$ ,  $z_s=15$ );  $Z_0Y$  ( $x_s=15$ );  $Z_0X$  ( $y_s=22$ ,  $y_s=8$ ).

Варіант 7. Ротор поля в площині  $Z_0Y$  ( $x_s=15$ ,  $x_s=1$ );  $X_0Z$  ( $y_s=8$ ).

## Хід роботи

1. Отримати картину розміщення провідників зі струмом.
2. дослідження поля в площині  $XOY$ :
  - побудувати картину поля в площині для кількох характерних перерізів  $zs$  (отримані картини повинні повністю відображати поведінку поля в площині);
  - побудувати графіки модуля напруженості магнітного поля  $H$  у площині для провідника  $A$  і  $B$  окремо, а також для сумарного поля;
  - побудувати картину ротора поля і його модуля в площині  $XOY$  для заданого за варіантом перерізу  $zs$ .
- 3 Дослідження поля в площині  $ZOY$ .
4. дослідження поля в площині  $ZOX$ .
5. Обчислити циркуляцію магнітного поля заданим шляхом (шлях вибрати згідно з варіантом).
6. Зробити висновки про виконану роботу.
7. Усно підготувати відповіді на запитання.
  - А) Чим характеризується магнітне поле?
  - Б) Дайте формулювання закону Біо-Савара?
  - В) Чому дорівнює потік вектора індукції магнітного поля через замкнуту поверхню?
  - Г) Як пов'язані між собою вектор напруженості та індукції магнітного поля?
  - Д) Як визначається напрям дії магнітного поля?
  - Е) У якому напрямку відносно провідника зі струмом модуль вектора напруженості магнітного поля максимальний?
  - Ж) Дайте визначення теореми про циркуляцію магнітного поля?
  - З) Чому дорівнює циркуляція магнітного поля по замкнутому контуру?
  - І) У чому схожість теореми про циркуляцію магнітного та електричного поля?
  - К) Ротор - це векторна чи скалярна характеристика поля?
  - Л) Як обчислюється ротор поля?
  - М) Дайте формулювання теореми Стокса.
  - Н) Зв'язок магнітного поля